פתרון מלא לשאלה - מורד הגרדיאנט

סעיף א' - מציאת הגרדיאנט ונקודת הקיצון

נתונה פונקציית העלות:

$$J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T A\mathbf{w} + \mathbf{b}^T\mathbf{w} + \alpha$$

1. חישוב הגרדיאנט $\nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w})$:

נשתמש בכללי גזירה וקטורית לפי הווקטור $\mathbf{w}$:

- הנגזרת של הביטוי הריבועי $\mathbf{w}^T A\mathbf{w}$ היא $(A + A^T)\mathbf{w}$. מכיוון שנתון כי A היא מטריצה סימטרית ($A = A^T$), הביטוי שווה ל-$2A\mathbf{w}$.
- הנגזרת של הביטוי הליניארי $\mathbf{b}^T\mathbf{w}$ היא $\mathbf{b}$.
- הנגזרת של הסקלר הקבוע α היא אפס.

נחבר את החלקים ונקבל את הגרדיאנט:

$$\nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}) = 2A\mathbf{w} + \mathbf{b}$$

2. מציאת נקודת הקיצון $\mathbf{w}^*$:

כדי למצוא את נקודת המינימום, נשווה את הגרדיאנט לווקטור האפס ונחלץ את $\mathbf{w}$:

$$2A\mathbf{w}^* + \mathbf{b} = 0 \implies 2A\mathbf{w}^* = -\mathbf{b}$$

נתון כי המטריצה A מוגדרת חיובית (positive-definite), ולכן בהכרח כל הערכים העצמיים שלה חיוביים (שונים מאפס), מה שמבטיח שהיא מטריצה הפיכה. נכפול משמאל ב-A^{-1}:

$$\mathbf{w}^* = -\frac{1}{2}A^{-1}\mathbf{b}$$

סעיף ב' - כלל העדכון בשיטת Gradient Descent

שיטת אלגוריתם מורד הגרדיאנט (Gradient Descent) מתעדכנת על פי הכלל הבא, עבור גודל צעד $\epsilon > 0$:

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} - \epsilon\nabla_{\mathbf{w}}J(\mathbf{w}^{(k)})$$

נציב את הגרדיאנט שחישבנו בסעיף א' אל תוך כלל העדכון, ונקבל:

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} - \epsilon(2A\mathbf{w}^{(k)} + \mathbf{b})$$

סעיף ג' - הבעת וקטור השגיאה באיטרציה הבאה

מוגדר וקטור השגיאה באיטרציה ה-k כ- $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^*$. עלינו להביע את $\mathbf{e}^{(k+1)}$ כפונקציה של $\mathbf{e}^{(k)}$.

לפי ההגדרה:

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^*$$

נציב את $\mathbf{w}^{(k+1)}$ מתוך כלל העדכון שמצאנו בסעיף ב':

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \left[\mathbf{w}^{(k)} - \epsilon(2A\mathbf{w}^{(k)} + \mathbf{b})\right] - \mathbf{w}^*$$

כדי להיפטר מהווקטור $\mathbf{b}$ ולקשר את הביטוי בחזרה לשגיאה, נשתמש בקשר שמצאנו בסעיף א' עבור נקודת הקיצון: $2A\mathbf{w}^* + \mathbf{b} = 0$. מכאן נובע כי $\mathbf{b} = -2A\mathbf{w}^*$. נציב זאת לתוך המשוואה שלנו:

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} - \epsilon(2A\mathbf{w}^{(k)} - 2A\mathbf{w}^*) - \mathbf{w}^*$$

נסדר מחדש את האיברים ונוציא גורמים משותפים:

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = (\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^*) - 2\epsilon A(\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^*)$$

מכיוון ש- $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^*$, נציב חזרה:

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{e}^{(k)} - 2\epsilon A\mathbf{e}^{(k)}$$

נוציא את $\mathbf{e}^{(k)}$ כגורם משותף מימין (כאשר I היא מטריצת היחידה בגודל $d \times d$):

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = (I - 2\epsilon A)\mathbf{e}^{(k)}$$

לכן, המטריצה Q הדרושה היא:

$$Q = I - 2\epsilon A$$

סעיף ד' - הוכחת הקטנת נורמת השגיאה והתכנסות

נתון לנו ש- $0 < \epsilon < 1/\lambda_{max}$, כאשר λ_{max} הוא הערך העצמי המקסימלי של A. עלינו להראות ש-$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\| < \|\mathbf{e}^{(k)}\|$.

מצאנו בסעיף ג' כי $\mathbf{e}^{(k+1)} = Q\mathbf{e}^{(k)}$. לפי תכונות נורמה של מטריצות ווקטורים, מתקיים אי-השוויון הבא:

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\| \leq \|Q\|_2 \|\mathbf{e}^{(k)}\|$$

כדי להוכיח שהשגיאה קטנה ממש (בהנחה ש-$\mathbf{e}^{(k)} \neq 0$), אנו צריכים להראות שהנורמה הספקטרלית (הערך העצמי המקסימלי בערכו המוחלט) של המטריצה Q קטנה מ-1.

נסמן את הערכים העצמיים של A ב-λ_i. כיוון ש-A מוגדרת חיובית, כל הערכים העצמיים שלה חיוביים ($\lambda_i > 0$). לפיכך, הערכים העצמיים של המטריצה $Q = I - 2\epsilon A$ הם מהצורה: $1 - 2\epsilon\lambda_i$.

נבדוק את הגבולות של הערכים העצמיים האלו תחת התנאי $0 < \epsilon < 1/\lambda_{max}$:

1. **חסם עליון:** כיוון ש-$\epsilon > 0$ ו-$\lambda_i > 0$, מתקיים $2\epsilon\lambda_i > 0$, ולכן:

$$1 - 2\epsilon\lambda_i < 1$$

2. **חסם תחתון:** מכיוון ש-$\lambda_i \leq \lambda_{max}$ והנתון אומר ש- $\epsilon < 1/\lambda_{max}$ (כלומר $\epsilon\lambda_{max} < 1$), מתקיים:

$$2\epsilon\lambda_i \leq 2\epsilon\lambda_{max} < 2$$

ולכן נחסר 2 מ-1 ונקבל:

$$1 - 2\epsilon\lambda_i > 1 - 2 = -1$$

מכאן שעבור כל ערך עצמי של Q, מתקיים $-1 < 1 - 2\epsilon\lambda_i < 1$. כלומר, הערך המוחלט של כל הערכים העצמיים של Q קטן ממש מ-1. מכיוון ש-Q מטריצה סימטרית, הנורמה ה-2 שלה שווה לערך העצמי המקסימלי בערך מוחלט:

$$\|Q\|_2 < 1$$

נציב חזרה לאי-השוויון של השגיאה ונקבל את מבוקשנו:

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\| \leq \|Q\|_2 \|\mathbf{e}^{(k)}\| < \|\mathbf{e}^{(k)}\|$$

(עבור $k = 0, 1, 2, \ldots$)

מסקנת התכנסות:
מכיוון שבכל איטרציה נורמת השגיאה מוכפלת בקבוע חיובי שקטן ממש מ-1 (נורמת Q), הסדרה $\|\mathbf{e}^{(k)}\|$ שואפת ל-0 ככל ש-$k \to \infty$. משמעות הדבר היא שווקטור השגיאה מתאפס בגבול:

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^*) = 0$$

ולכן הווקטור $\mathbf{w}^{(k)}$ מתכנס באופן מובטח לנקודת המינימום $\mathbf{w}^*$.